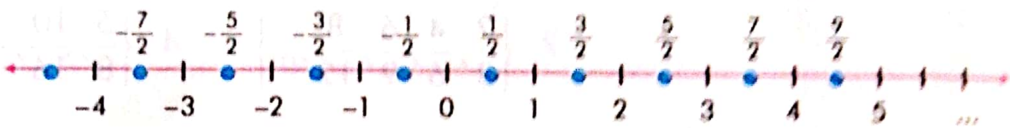
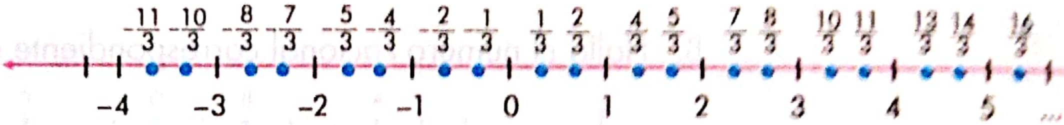
12. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo Localicemos en la recta algunos racionales de denominador 2 y algunos racionales de denominador 3.

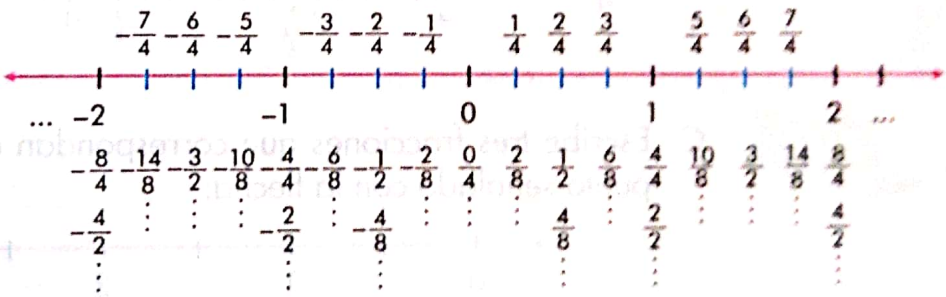
Solución





Conclusión En general, todos los números racionales de denominador 2, 3, 4, etc., pueden representarse en la recta, dividiendo cada unidad por el número de partes que indique el denominador.

Localicemos en la recta algunos números racionales de denominador 4 y escribamos algunas fracciones equivalentes en cada punto.



Conclusión Cada número racional con denominador *n* puede representarse en la recta dividiendo cada segmento unidad en *n* partes iguales.
Las fracciones equivalentes quedan representadas por el mismo punto en la recta numérica.

Escribamos el numerador que falta:

$13 = \frac{52}{4}$; luego $\frac{x}{4}$ equivale a $\frac{55}{4}$.

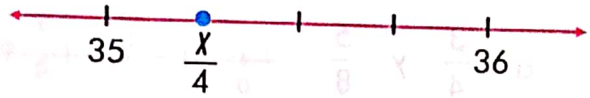
Práctica 12

A. Localiza en la recta algunos números racionales de denominador dado; encontrados entre los puntos −1 y 1.

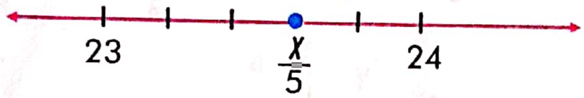
1. 5 2. 6 3. 7 4. 8 5. 10

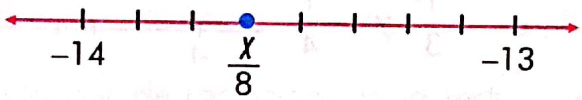
B. Escribe algunos fraccionarios equivalentes a cada punto del ejercicio A.

C. Escribe el numerador que falta en cada caso:

1. 

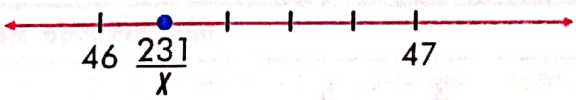
2. 

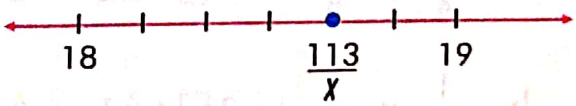
3. 

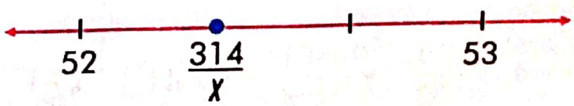
4. 

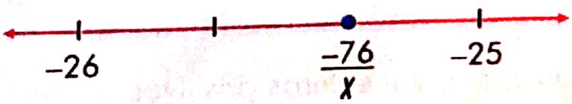
5. 

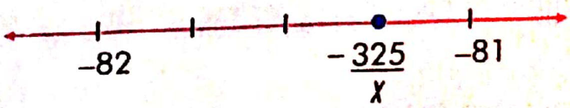
D. Escribe el denominador que falta en cada caso:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

13. RELACIONES DE ORDEN EN LOS RACIONALES

Ejemplo

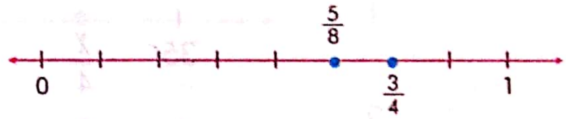
Comparemos los siguientes números racionales en la recta numérica y multipliquemos los términos en forma cruzada:

a. $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ b. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$ c. $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{4}$

Solución

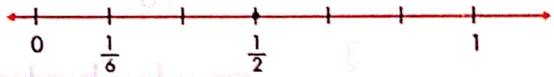
En la recta numérica

a. $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$



$\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$

b. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$



$\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$

c. $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$

Conclusión

Un número racional $\frac{a}{b}$ es menor que otro $\frac{c}{d}$ si $\frac{a}{b}$ queda a la izquierda de $\frac{c}{d}$ en la recta numérica.

Multiplicando en forma cruzada

a. $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ $3 \times 8 \square 4 \times 5 \Rightarrow 24 \boxed{>} 20 \Rightarrow \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$

b. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$ $1 \times 2 \square 6 \times 1 \Rightarrow 2 \boxed{<} 6 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$

c. $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{4}$ $-1 \times 4 \square 3 \times -1 \Rightarrow -4 \boxed{<} -3 \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$

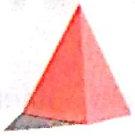
Conclusión

Sean ***a, b, c*** y ***d*** enteros positivos.

El número racional $\frac{a}{b}$ es menor que $\frac{c}{d}$ si $ad < bc$.

El número racional $-\frac{a}{b}$ es menor que $-\frac{c}{d}$ si $-ad < -bc$.

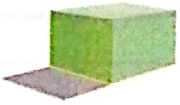
Práctica 12



A. Localiza en la recta algunos números racionales de denominador dado; encontrados entre los puntos –1 y 1.

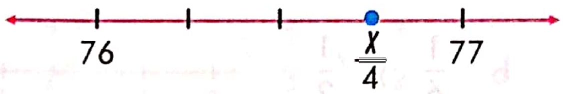
1. 5 2. 6 3. 7 4. 8 5. 10

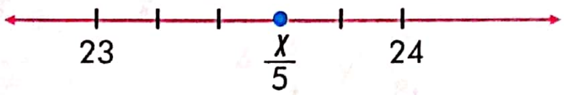
B. Escribe algunos fraccionarios equivalentes a cada punto del ejercicio A.

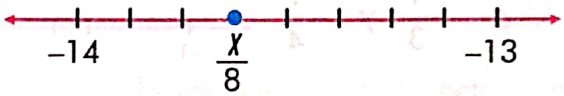


C. Escribe el numerador que falta en cada caso:

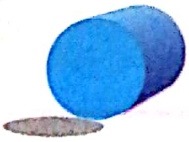
1.


2.


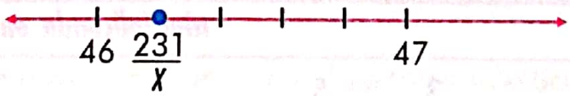
3.


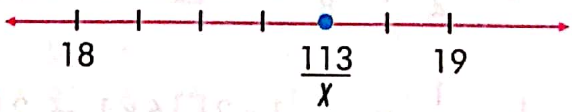
4.


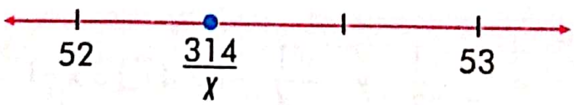
5.

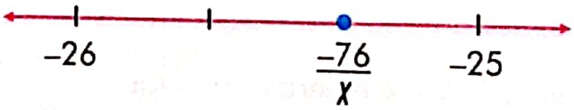



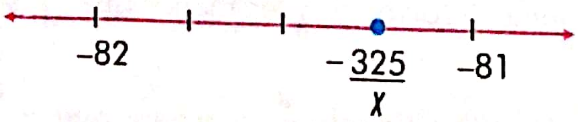
D. Escribe el denominador que falta en cada caso:

1.


2.


3.


4.


5.


14. ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo

Hallemos la suma de los siguientes números racionales positivos utilizando el mínimo común denominador:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

Solución

$$\frac{1}{6}=\frac{4}{24};\ \frac{3}{8}=\frac{9}{24}\Rightarrow\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{4}{24}+\frac{9}{24}=\frac{4+9}{24}=\frac{13}{24}$$

Hallemos la suma de los siguientes números racionales negativos utilizando el mínimo común denominador:

$$\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right)=\left(-\frac{8}{18}\right);\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{3}{18}\right)\Rightarrow\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{8}{18}\right)+\left(-\frac{3}{18}\right)=\left(-\frac{11}{18}\right)$$

Conclusión

Cuando se suman dos números racionales positivos (negativos) el resultado es otro número racional positivo (negativo).

La adición de números racionales cumple las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa y la existencia del inverso aditivo.

Hallemos la suma de los siguientes números racionales:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{8}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{4}{8}\right);\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{8}=\left(-\frac{4}{8}\right)+\frac{5}{8}=\frac{-4+5}{8}=\frac{1}{8}$$

Hallemos la suma de los siguientes números racionales:

$$\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{10}\right)$$

$$\frac{1}{4}=\frac{5}{20};\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(-\frac{6}{20}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{5}{20}+\left(-\frac{6}{20}\right)=\frac{5+(-6)}{20}=-\frac{1}{20}$$

Conclusión

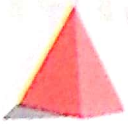
Cuando se suman dos números racionales y uno de ellos es positivo y el otro es negativo, el resultado es otro número racional, que puede ser positivo, negativo o cero.

Sumemos $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{5}\right)$

$$\frac{2}{3}=\frac{40}{60};\ \frac{3}{4}=\frac{45}{60};\ \left(-\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{12}{60}\right)\Rightarrow\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{5}\right)=$$

$$\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\left(-\frac{12}{60}\right)=\frac{40+45+(-12)}{60}=\frac{73}{60}$$

Práctica 14

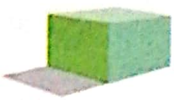


A. Halla la suma de los siguientes números racionales positivos:

1. $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$
2. $\frac{5}{8}+\frac{1}{6}$
3. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{6}+\frac{9}{10}$
5. $\frac{5}{6}+\frac{2}{5}$

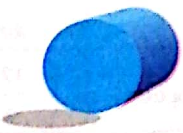
B. Halla la suma de los siguientes números racionales negativos:

1. $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$
2. $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)$
3. $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$
4. $\left(-\frac{7}{9}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$
5. $\left(-\frac{2}{10}\right)+\left(-\frac{7}{100}\right)$



C. Halla el resultado de sumar los siguientes números racionales:

1. $\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{3}$
2. $\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{10}$
3. $\left(-\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{6}$
4. $\frac{7}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{10}\right)$



D. Suma:

1. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$
2. $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$
3. $\frac{3}{8}+\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)$
4. $\frac{1}{2}+\left(-\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{4}$
5. $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$

15. SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo Encontremos un número racional que sumado con $\frac{1}{2}$ dé como resultado 0.

Solución $\frac{1}{2} + \square = 0$; $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. $\left(-\frac{1}{2}\right)$ es el opuesto o inverso aditivo de $\frac{1}{2}$, y viceversa.

Hallemos la resta de los siguientes números racionales positivos, utilizando el mínimo común denominador:

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{8}{18}\ ;\ \frac{1}{6} = \frac{3}{18} \Rightarrow \frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{8}{18} - \frac{3}{18} = \frac{8}{18} + \underbrace{\left(-\frac{3}{18}\right)}_{\text{opuesto de } \frac{3}{18}} = \frac{5}{18}$$

Hallemos la resta de los siguientes números racionales negativos, utilizando el mínimo común denominador:

$$\left(-\frac{1}{7}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{4}{28}\right); \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{21}{28}\right) \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{4}{28}\right) - \left(-\frac{21}{28}\right) =$$

$$\left(-\frac{4}{28}\right) + \underbrace{\frac{21}{28}}_{\text{opuesto de } \left(-\frac{21}{28}\right)} = \frac{(-4) + 21}{28} = \frac{17}{28}$$

Hallemos la resta de los siguientes números racionales:

$$\left(\frac{5}{9}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{12}{9}\right) \Rightarrow \frac{5}{9} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{9} - \left(-\frac{12}{9}\right) = \frac{5}{9} + \underbrace{\frac{12}{9}}_{\text{opuesto de } \left(-\frac{12}{9}\right)} = \frac{17}{9}$$

Hallemos la resta de los siguientes números racionales:

$$\left(-\frac{4}{10}\right) - \frac{5}{4}$$

$$\left(-\frac{4}{10}\right) = \left(-\frac{8}{20}\right), \frac{5}{4} = \frac{25}{20} \Rightarrow \left(-\frac{4}{10}\right) - \frac{5}{4} = \left(-\frac{8}{20}\right) - \frac{25}{20} =$$

$$\left(-\frac{8}{20}\right) + \underbrace{\left(-\frac{25}{20}\right)}_{\text{opuesto de } \left(\frac{25}{20}\right)} = \frac{(-8) + (-25)}{20} = \left(-\frac{33}{20}\right)$$

Práctica 15

A. Halla la resta de los siguientes números racionales positivos:

1. $\frac{2}{3}-\frac{7}{12}$
2. $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$
3. $\frac{7}{9}-\frac{5}{6}$
4. $\frac{11}{15}-\frac{7}{10}$
5. $\frac{3}{5}-\frac{2}{10}$

B. Halla la resta de los siguientes números racionales negativos:

1. $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$
2. $\left(-\frac{5}{8}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$
3. $\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$
4. $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)$
5. $\left(-\frac{5}{12}\right)-\left(-\frac{4}{6}\right)$

C. Halla el resultado en cada caso:

1. $\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{3}$
2. $\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{8}\right)$
3. $\frac{7}{10}-\left(-\frac{4}{5}\right)$
4. $\left(-\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{5}$
5. $\left(-\frac{7}{12}\right)-\frac{3}{4}$

D. Efectúa la operación combinada de adición y sustracción de números racionales:

1. $\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{3}$
2. $\left(-\frac{5}{8}\right)-\frac{2}{3}+\frac{4}{6}$
3. $\frac{3}{4}-\frac{4}{5}-\left(-\frac{9}{10}\right)$
4. $\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(-\frac{3}{6}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)$

16. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Si aplicamos sucesivamente operadores de la forma $\frac{a}{b}x$ y $-\frac{a}{b}x$ al uno, estamos realizando una multiplicación de números racionales.

Ejemplo

Si los dos operadores son de la forma $\frac{a}{b}x$ el resultado está a la derecha del cero y representa un número racional positivo. Multipliquemos $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$:

Solución

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8} = \frac{4\times 3}{9\times 8} = \frac{12}{72}$$

Si los dos operadores son de la forma $-\frac{a}{b}x$ el resultado está a la derecha del cero y representa un número racional positivo. Multipliquemos $\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)$:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{(-3)\times(-2)}{5\times 5}=\frac{6}{25}$$

Si un operador es de la forma $\frac{a}{b}x$ y el otro es de la forma $-\frac{a}{b}x$ el resultado está a la izquierda del cero y representa un número racional negativo.

Multipliquemos a. $\frac{5}{8}\times\left(-\frac{3}{7}\right)$; b. $\left(-\frac{1}{6}\right)\times\frac{9}{4}$

a. $\frac{5}{8}\times\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{5\times(-3)}{8\times 7}=\left(-\frac{15}{56}\right)$ b. $\left(-\frac{1}{6}\right)\times\frac{9}{4}=\frac{(-1)\times 9}{6\times 4}=\left(\frac{-9}{24}\right)$

Conclusión

Para multiplicar números racionales se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores. El signo del racional que se obtiene cumple la misma ley de signos que la multiplicación de números enteros.

La multiplicación de números racionales cumple las mismas propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa y modulativa de los números enteros, además de la existencia del inverso multiplicativo, el cual se explicará más adelante.

Hallemos la expresión más simple, si es posible, de cada uno de los números racionales obtenidos en los ejemplos de esta página.

$$\frac{12}{72}=\frac{12\div 6}{72\div 6}=\frac{2}{12}=\frac{2\div 2}{12\div 2}=\frac{1}{6}$$

$\frac{6}{25}$ está escrito en su expresión más simple.

$\left(-\frac{15}{56}\right)$ está escrito en su expresión más simple. $\left(-\frac{9}{24}\right)=\frac{-9\div 3}{24\div 3}=\left(-\frac{3}{8}\right)$

Práctica 16

A. Efectúa las siguientes multiplicaciones de números racionales:

1. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}$
2. $\frac{2}{5} \times \frac{7}{8}$
3. $\left(-\frac{4}{9}\right) \times \left(-\frac{12}{16}\right)$
4. $\left(-\frac{10}{7}\right) \times \frac{14}{25}$
5. $\left(-\frac{6}{15}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right)$
6. $\frac{12}{25} \times \left(-\frac{8}{18}\right)$
7. $\frac{15}{9} \times \left(-\frac{1}{5}\right)$
8. $\frac{4}{10} \times \frac{5}{10}$

B. Escribe cada número racional obtenido en el ejercicio A en forma más simple, si es posible.

C. Halla el número racional que falta para que la igualdad sea verdadera:

1. $\frac{3}{8} \times \frac{\square}{\square} = \frac{3}{16}$
2. $\frac{2}{5} \times \frac{\square}{\square} = \frac{3}{10}$
3. $\left(-\frac{2}{7}\right) \times \frac{\square}{\square} = \left(-\frac{2}{5}\right)$
4. $\frac{\square}{\square} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{5}$
5. $\frac{\square}{\square} \times \left(-\frac{3}{10}\right) = \left(-\frac{9}{35}\right)$
6. $\frac{\square}{\square} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}$

17. DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La división de números racionales se trasforma en hallar el factor desconocido en una multiplicación de números racionales.

Ejemplo $\dfrac{8}{15} \div \dfrac{4}{5} = n$

Solución Encontrar n equivale a hallar el factor n en $n \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{15}$.

Para hallar el resultado se multiplica el dividendo $\dfrac{8}{15}$ por un número racional $\dfrac{a}{b}$ que multiplicado por $\dfrac{4}{5}$ dé 1. Dicho racional es $\dfrac{5}{4}$ y se denomina ***inverso multiplicativo***.

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1\right)$$

$$\frac{8}{15} \times \underbrace{\frac{5}{4}}_{\boxed{\text{Inverso multiplicativo de } \frac{4}{5}}} = \frac{8 \times 5}{15 \times 4} = \frac{40}{60} = \frac{40 \div 10}{60 \div 10} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3} \rightarrow n$$

Puede verificarse que $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{15}$

$\left(-\dfrac{9}{4}\right) \div \dfrac{3}{4} = n$. Debemos hallar n, tal que $n \times \dfrac{3}{4} = \left(-\dfrac{9}{4}\right)$

Entonces, $\left(-\dfrac{9}{4}\right) \div \dfrac{3}{4} = \left(-\dfrac{9}{4}\right) \times \underbrace{\dfrac{4}{3}}_{\boxed{\text{Inverso multiplicativo de } \frac{3}{4}}} = \dfrac{(-\cancel{9}^{3}) \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{3}_{1}} = -3$

Verifiquemos: $(-3) \times \dfrac{3}{4} = \left(-\dfrac{9}{4}\right)$

Conclusión Para dividir el número racional $\dfrac{a}{b}$ entre $\dfrac{d}{c}$ se multiplica el divisor $\dfrac{a}{b}$ por el inverso multiplicativo del divisor $\dfrac{d}{c}$. El divisor nunca puede ser cero.

La expresión $\dfrac{4}{5} \div \dfrac{7}{10}$ puede representarse como una fracción compuesta en la que el numerador es $\dfrac{4}{5}$ y el denominador es $\dfrac{7}{10}$, así: $\dfrac{4}{5} \div \dfrac{7}{10} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{10}}$.

Práctica 17

A. Escribe cada división de racionales $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = n$ de la forma $n \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

1. $\frac{3}{8} \div \frac{1}{2} = n$
2. $\frac{1}{4} \div \frac{2}{3} = n$
3. $\frac{5}{3} \div \frac{5}{4} = n$
4. $\frac{3}{10} \div \frac{7}{10} = n$
5. $\frac{5}{8} \div \frac{3}{2} = n$

B. Efectúa cada división del ejercicio A, hallando el inverso multiplicativo del divisor.

C. Halla el cociente entre números mixtos, trasformándolos primero en fraccionarios impropios:

1. $2\frac{1}{2} \div 1\frac{3}{4}$
2. $1\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{4}$
3. $1\frac{3}{8} \div 4\frac{1}{3}$
4. $5\frac{2}{3} \div 6\frac{3}{4}$
5. $4\frac{2}{3} \div 2\frac{1}{7}$

D. Simplifica cada expresión:

1. $\dfrac{\frac{54}{7}}{\frac{72}{5}}$
2. $\dfrac{\frac{29}{3}}{\frac{8}{3}}$
3. $\dfrac{-\frac{6}{5}}{\frac{42}{10}}$
4. $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{10}}$
5. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\left(-\frac{3}{4}\right)}$
6. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \times \dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{5}{6}\right)}$

18. POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo Desarrollemos $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

Solución

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

Efectuemos $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}{4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$= \frac{(-3)^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

Conclusión Para elevar un número racional a una potencia cualquiera se elevan su numerador y su denominador a esa potencia.

Escribamos en forma más simple: a. $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^3$ b. $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2$

a. $$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

b. $$\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left[\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2$$

Conclusión

Algunas propiedades de la potenciación

1. Si $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ y $m, n \in \mathbf{N}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
2. Si $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ y $m, n \in \mathbf{N}$, entonces $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$
3. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^n$
4. Si $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$, con $\frac{a}{b} \neq 0$.

Scanned with CamScanner

Práctica 18

A. Halla el resultado de cada potencia:

1. $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$ 2. $\left(\frac{3}{8}\right)^3$ 3. $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ 4. $\left(-\frac{2}{9}\right)^1$ 5. $\left(\frac{4}{6}\right)^5$

B. Desarrolla los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la potenciación:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$

2. $\left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^3$

3. $\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^3$

4. $\left[\left(\left(-\frac{4}{9}\right)^0\right)^1\right]^2$

5. $\left(-\frac{4}{15}\right)^3 \times \left(-\frac{3}{8}\right)^3$

6. $\left(\frac{2}{10}\right) \times \left(\frac{2}{10}\right)^0 \times \left(\frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$

C. Efectúa las siguientes operaciones:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 2. $\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^0\right)^7$ 3. $\left(\frac{12}{5}\right)^3$ 4. $\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

D. Efectúa la operación:

1. $\dfrac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^1}$ 2. $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{3}{6}\right)^2$

19. RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo Calculemos: $\sqrt{\frac{4}{9}}$

Solución $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{2}{3}$

Calculemos: $\sqrt{\frac{49}{81}}$

$\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$

Calculemos: $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$

$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{64}\right)} = \frac{\sqrt[3]{(-1)}}{\sqrt[3]{64}} = \left(-\frac{1}{4}\right)$

Conclusión Para calcular la raíz n (enésima) de un número racional se calcula la raíz n (enésima) del numerador dividido entre la raíz n (enésima) del denominador. Cuando el racional es negativo y n es par, el resultado no puede determinarse.

Escribamos en forma más simple y calculemos: a. $\sqrt{\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}}$ b. $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{64}\right)^2}$ c. $\sqrt{\frac{1}{4}\times\left(-\frac{9}{16}\right)}$

a. $\sqrt{\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\times\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{2\times1}{3\times2} = \frac{1}{3}$

b. $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{64}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{64}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

c. $\sqrt{\frac{1}{4}\times\left(-\frac{9}{16}\right)} = \sqrt{\frac{1\times(-9)}{4\times16}} = \sqrt{\left(-\frac{9}{64}\right)} \rightarrow$ no puede determinarse

Conclusión

Algunas propiedades de la radicación

1. Si $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}^+\cup\{0\}$, $n\in\mathbf{N}$, entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
2. Si $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}^-$ y $n\in\mathbf{N}$, n es impar, entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\in\mathbf{Q}^+\cup\{0\}$, $n\in\mathbf{N}$, entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
4. Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\in\mathbf{Q}^-$ y $n\in\mathbf{N}$, n es impar, entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
5. Si $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ puede determinarse, entonces puede escribirse como $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, con $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$ y $n\in\mathbf{N}$, y también, $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ puede escribirse como $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$ si $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$ y $m, n\in\mathbf{N}$.

Práctica 19

A. Calcula las raíces cuadradas exactas:

1. $\sqrt{\frac{1}{9}}$ 2. $\sqrt{\frac{4}{25}}$ 3. $\sqrt{\frac{16}{36}}$ 4. $\sqrt{\frac{100}{81}}$ 5. $\sqrt{\frac{121}{144}}$

B. Calcula las raíces exactas:

1. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ 2. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ 3. $\sqrt[3]{-\frac{8}{64}}$ 4. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 5. $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

C. Calcula las raíces, en cada caso, aplicando las propiedades:

1. $\sqrt{\frac{4}{49} \times \frac{1}{64}}$ 3. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$ 5. $\sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{9}{16} \times \frac{25}{36}}$

2. $\sqrt{\left(\frac{100}{121}\right)^3}$ 4. $\sqrt[3]{\frac{27}{8} \times \frac{64}{125}}$

D. Efectúa la operación combinada:

1. $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}\right)^3} \div \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}$ 2. $\sqrt{\dfrac{\frac{2}{25} \times \frac{4}{8}}{\frac{3 \times 5}{5 \times 3}}}$

20. PROBLEMAS CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo

Resolvamos el siguiente problema: En un salón de 7o. grado la mitad de alumnos son niñas, y en otro, hay 3 niñas por cada 5 alumnos. Si hay igual número de alumnos en cada clase, ¿en cuál hay más niñas?

Solución

La mitad de alumnos son niñas $\rightarrow \frac{1}{2}$

Tres niñas por cada 5 alumnos $\rightarrow \frac{3}{5}$

$\frac{1}{2} \boxed{\ } \frac{3}{5} \Rightarrow 1 \times 5 \boxed{\ } 2 \times 3; \quad \Rightarrow 5 < 6$

Luego hay menos niñas en el primer salón. $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

Un obrero pintó en la mañana $\frac{3}{8}$ de cerca y en la tarde, $\frac{4}{8}$. ¿Cuánto pintó en total? ¿Cuánto le falta por pintar?

$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3+4}{8} = \frac{7}{8} \rightarrow$ Ha pintado en total $\frac{7}{8}$ de cerca.

$\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \rightarrow$ Le falta por pintar $\frac{1}{8}$ de cerca.

En una pintura, $\frac{1}{4}$ del dibujo es rojo, $\frac{1}{3}$ es gris y $\frac{1}{6}$ es negro. El resto es blanco. ¿Qué parte es blanca?

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+4+2}{12} = \frac{9}{12}$

$\frac{12}{12} - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$ de la pintura es blanca.

Ana María cortó una hoja de papel en 6 partes iguales. Luego coloreó $\frac{1}{4}$ de un pedazo y lo recortó. ¿Qué fracción de la hoja coloreó?

$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \rightarrow$ Coloreó $\frac{1}{24}$ de la hoja.

Los zapatos de Daniel miden $\frac{1}{4}$ m de largo. Los empleó como segmento para medir un lado de una habitación. Si contó 20 veces la longitud del zapato, ¿qué tamaño tenía la habitación?

$20 \times \frac{1}{4}$ m $= \frac{20 \times 1}{4}$ m $= \frac{20}{4}$ m $= 5$ m de largo tiene la habitación.

Práctica 20

A. Resuelve los siguientes problemas:

1. Entre 20 minutos y un cuarto de hora, ¿cuál es mayor?
2. En un huerto hay $\frac{2}{8}$ de manzanas, $\frac{1}{3}$ de perales, $\frac{3}{18}$ de duraznos y $\frac{3}{12}$ de cerezos.
   a. ¿Cuál árbol es más abundante?
   b. ¿Cuál árbol es menos abundante?
   c. ¿De cuáles árboles hay la misma cantidad?
3. Una lección de música dura $\frac{1}{2}$ hora. La práctica dura $\frac{1}{3}$ de hora. ¿Cuánto dura en total?
4. Una rana saltó $2\frac{7}{8}$ m. Después saltó $2\frac{3}{4}$ m.
   a. ¿Cuánto saltó en total?
   b. ¿Cuánto mayor fue el primer salto con respecto al segundo?
5. Una tortuga puede recorrer $\frac{1}{10}$ km en una hora. A esta velocidad, ¿cuánto recorrerá en 24 horas?
6. Un día equivale a $\frac{1}{7}$ de semana. ¿A qué fracción de la semana equivale $\frac{3}{4}$ de día?
7. José Luis pesa $45\frac{1}{2}$ kg. Jorge Enrique pesa $48\frac{3}{4}$ kg. Si se pesan al tiempo, ¿cuánto marcará la báscula?
8. Seis gallinas tienen el mismo peso. El peso total es 17 kilos. ¿Cúanto pesa cada una?
9. En una excursión, el lunes se recorrieron 238,4 km; el martes, 467,5 km; el miércoles, 537,8 km. ¿Cuánto se recorrió en total?
10. La profundidad promedio de un río es 5,3 m y la de un lago es 8,2 m. ¿Cuánto más profundo es el lago?
11. Recorrí 27,5 km y gasté 2,5 galones de gasolina. ¿Cuántos kilómetros recorrí por galón de gasolina?
12. Un galón de agua pesa 3,8 kilos. ¿A cuántos galones equivalen 250,8 kilos de agua?
13. Un libro tiene 30,002 cm de grueso (sin contar las tapas). Si cada página tiene 0,007 cm de grosor, ¿cuántas páginas tiene el libro?