3. Funciones trigonométricas

Las **funciones trigonométricas** se pueden estudiar de dos formas: a partir de las relaciones entre los ángulos y los lados de un triangulo rectángulo o a partir de la circunferencia unitaria como funciones de números reales.

A continuación se presenta la circunferencia unitaria y cómo se establecen las funciones trigonométricas a partir de esta.

3.1 Circunferencia unitaria

Ampliación multimedia

La **circunferencia unitaria** es aquella cuyo centro está en el origen y cuyo radio es igual a 1.

En la figura 2, se muestra una circunferencia unitaria. El punto P pertenece a la circunferencia y las coordenadas x, y corresponden a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo ORP. Si se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ORP se tiene que $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, la ecuación de la circunferencia unitaria es $x^2 + y^2 = 1$ y todos los puntos P que cumplen esta igualdad pertenecen a la circunferencia.

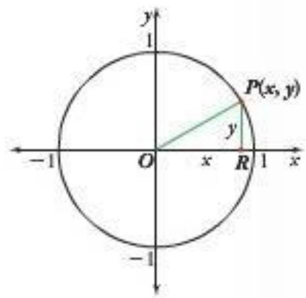


Figura 2.

EJEMPLOS

1. Comprobar que el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria. Luego, determinar en qué cuadrante se ubica.

Primero, se tiene que $x = \frac{3}{5}$ y $y = \frac{4}{5}$.

Luego, se remplazan estos valores en la ecuación de la circunferencia unitaria y se resuelve así:

$x^2 + y^2 = 1$	Ecuación de la circunferencia.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$	Se remplazan las coordenadas del punto.
$\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$	Se resuelven las potencias.
$\frac{25}{25} = 1$	Se efectúa la suma.
$1 = 1$	Se divide.

Finalmente, se tiene que el punto pertenece a la circunferencia unitaria porque la igualdad se cumple. Como el signo de ambas coordenadas es positivo, entonces el punto está ubicado en el primer cuadrante.

2. Hallar la coordenada y del punto $\left(-\frac{1}{2}, y\right)$, que pertenece a la circunferencia unitaria y está ubicado en el segundo cuadrante.

Se realizan los siguientes pasos:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$	Se remplazan las coordenadas en la ecuación de la circunferencia unitaria.
$\frac{1}{4} + y^2 = 1$	Se resuelve la potencia.
$y^2 = 1 - \frac{1}{4}$	Se resta $\frac{1}{4}$ en ambos lados de la igualdad.
$y^2 = \frac{3}{4}$	Se efectúa la resta.
$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	Se extrae la raíz cuadrada.
$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$	La ordenada en el segundo cuadrante es positiva.

Por tanto, el punto es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Puntos de la circunferencia unitaria

Dada la circunferencia unitaria y un ángulo θ en posición normal, el lado final del ángulo interseca a la circunferencia en un punto P. Como el ángulo θ está en radianes y el radio de la circunferencia es igual a 1, entonces se tiene que:

$s = r\theta$ Ecuación de la longitud de un arco.

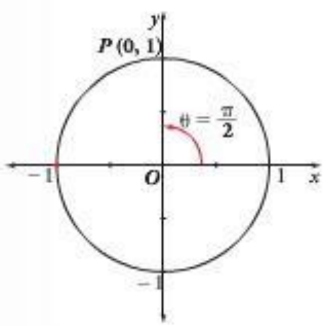
$s = 1 \cdot \theta$ Se remplaza la medida del radio.

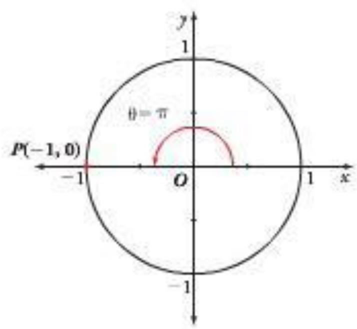
$s = \theta$ Se multiplica.

Por tanto, en la circunferencia unitaria la medida del ángulo θ en radianes es igual a la longitud del arco s que subtiende. Además se cumple que:

- Si el ángulo θ en radianes es positivo, entonces, el arco que subtiende se define en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
- Si el ángulo θ en radianes es negativo, entonces, el arco que subtiende se define en el sentido de las manecillas del reloj.

Los puntos P determinados por los ángulos $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \pi$ son:



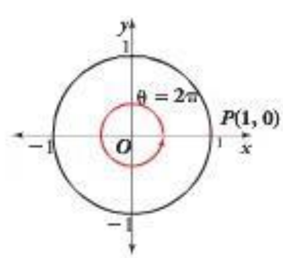


EJEMPLO

Determinar el punto P de la circunferencia unitaria a partir del ángulo θ en posición normal.

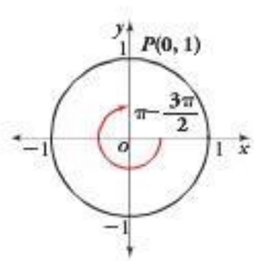
a. $\theta = 2\pi$

Se traza la circunferencia unitaria y se construye el ángulo $\theta = 2\pi$, teniendo en cuenta que es positivo. Como el lado final coincide con el lado inicial entonces, este interseca a la circunferencia unitaria en el punto $P(1, 0)$.



b. $\pi = -\frac{3}{2}\pi$

En este caso el ángulo $\pi = -\frac{3}{2}\pi$ es negativo, por esta razón el arco que subtiende se define en el sentido de las manecillas del reloj. Como el lado final coincide con el semieje y positivo, entonces el punto en el que interseca a la circunferencia unitaria es $P(0, 1)$.



Matemática*mente*

Si θ es un ángulo en posición normal, cuya medida es -3π radianes, ¿cuál es el punto en el que el lado final interseca a la circunferencia unitaria?

3.2 Definición de las funciones trigonométricas

Las **funciones trigonométricas** pueden definirse a partir de la circunferencia unitaria. Para esto se construye un ángulo θ en posición normal cuyo lado final interseque a la circunferencia unitaria en el punto P. Como cada ángulo θ define un único punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria, a partir de sus coordenadas se pueden definir las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente, así:

$$\cos\theta = x \qquad \text{sen}\,\theta = y \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{1}{y}, y \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

El **signo de las funciones trigonométricas** depende del cuadrante en el que se ubique el punto que determina el ángulo θ. Por ejemplo, el punto de intersección de la circunferencia unitaria con un ángulo en posición normal cuya medida es $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad, es $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como la coordenada en x es negativa entonces el coseno del ángulo θ es negativo.

En la siguiente tabla se muestra el signo de las funciones trigonométricas según las coordenadas x, y de un punto determinado por un ángulo θ en posición normal.

Cuadrante	Signos de (x, y)	Funciones positivas	Funciones negativas
I	$x > 0, y > 0$	sen θ, cos θ, tan θ, sec θ, csc θ y cot θ	Ninguna
II	$x < 0, y > 0,$	sen θ y csc θ	cos θ, tan θ, cot θ y sec θ
III	$x < 0, y < 0$	tan θ y cot θ	sen θ, cos θ, sec θ y csc θ
IV	$x > 0, y < 0$	cos θ y sec θ	sen θ, tan θ, cot θ y csc θ

EJEMPLO

Calcular el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ que determina el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en la circunferencia unitaria.

Primero, se identifican las coordenadas del punto: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$.

Luego, se utilizan las coordenadas para calcular el valor de cada función trigonométrica así:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sec\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente, se tiene que el signo de todas las funciones es positivo porque el punto está en el primer cuadrante.

Matemática*mente*

¿Es posible que todas las funciones trigonométricas de un ángulo sean negativas?

Recuerda que...

Como las funciones trigonométricas se pueden definir en la circunferencia unitaria, también se les llama funciones circulares.

Dominio de las funciones trigonométricas

El dominio de las funciones trigonométricas depende de las coordenadas x, y del punto P que corresponde a la intersección de un ángulo θ en posición normal con la circunferencia unitaria. Por tanto, se tiene que:

- El dominio de las funciones sen θ y cos θ son todos los ángulos θ.
- El dominio de las funciones tan θ y sec θ no está definido cuando $x = 0$, es decir, cuando θ toma valores como $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. En general, las funciones tan θ y sec θ no están definidas para $\theta = n\frac{\pi}{2}$, donde n es un entero impar.
- El dominio de las funciones cot θ y csc θ no está definido cuando $y = 0$, es decir, cuando θ toma valores como 0 y π. En general, las funciones cot θ y csc θ no están definidas para $\theta = n\pi$, donde n es entero.

Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

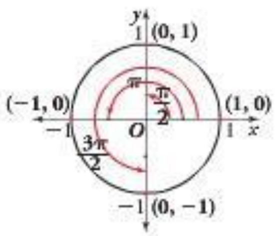


Figura 3.

Los ángulos cuadrantales medidos en radianes son 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y 2π. En la figura 3 se muestra el lado final de los ángulos cuadrantales. Como el lado final de los ángulos cuyas medidas son 0 y 2π coincide, entonces el valor de las funciones trigonométricas para estos dos ángulos es el mismo.

Para determinar el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales, se toman las coordenadas del punto $P(x, y)$ determinado por cada ángulo cuadrantal en la circunferencia unitaria, como se muestra en la siguiente tabla.

θ	$P(x, y)$	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0	(1, 0)	0	1	0	Indefinida	1	Indefinida
$\frac{\pi}{2}$	(0, 1)	1	0	Indefinida	0	Indefinida	1
π	(−1, 0)	0	−1	0	Indefinida	−1	Indefinida
$\frac{3\pi}{2}$	(0, −1)	−1	0	Indefinida	0	Indefinida	−1

EJEMPLO

Aplicar las funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales para simplificar la siguiente expresión.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right)$$

Primero, se calculan los valores de las funciones trigonométricas que hay en la expresión, teniendo en cuenta que el ángulo cuya medida es $\frac{11\pi}{2}$ es coterminal con el de medida $\frac{3\pi}{2}$.

$$\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Luego, se remplazan los valores obtenidos en la expresión inicial.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(0) + \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

Finalmente, se tiene que la expresión es igual a $-\frac{1}{2}$.

Funciones trigonométricas de ángulos especiales

Actividad

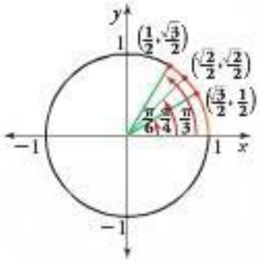


Figura 4.

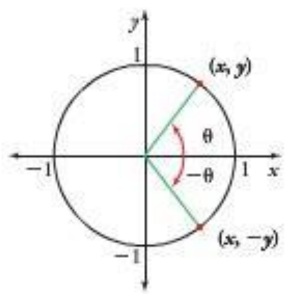
Además de los ángulos cuadrantales, existen otros ángulos especiales que se utilizan frecuentemente en trigonometría. Las medidas de estos ángulos en radianes son: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$.

El punto $P(x, y)$, que determina estos ángulos, se muestra en la figura 4 y los valores de las funciones trigonométricas son:

θ	$P(x, y)$	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Funciones pares e impares

En la siguiente figura se muestran los puntos $P(x, y)$ y $Q(x, -y)$ de la circunferencia unitaria, tales que P está determinado por el ángulo θ y Q por el ángulo $-\theta$.



Si se comparan las funciones trigonométricas de los ángulos θ y $-\theta$ se tiene que:

$\text{sen}(-\theta) = -y = -\text{sen}\,\theta$ $\qquad$ $\csc(-\theta) = \frac{1}{-y} = -\frac{1}{y} = -\csc\theta$

$\cos(-\theta) = x = \cos\theta$ $\qquad$ $\sec(-\theta) = \frac{1}{x} = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(-\theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$

Por tanto, las funciones coseno y secante son pares porque:

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\sec(-\theta) = \sec\theta$

En cambio, las funciones seno, tangente, cotangente y cosecante son impares porque:

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Por ejemplo, $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ y $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

Recurso imprimible

3.3 Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal

Sea θ un ángulo agudo en posición normal y $P(x, y)$ cualquier punto de su lado final con excepción del origen. Si r es la distancia del origen a $P(x, y)$, entonces, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y las funciones trigonométricas se definen como:

$\cos \theta = \dfrac{x}{r}$	$\sec \theta = \dfrac{r}{x}$ con $x \neq 0$
$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{r}$	$\csc \theta = \dfrac{r}{y}$ con $y \neq 0$
$\tan \theta = \dfrac{y}{x}$ con $x \neq 0$	$\cot \theta = \dfrac{x}{y}$ con $y \neq 0$

Matemática*mente*

A partir de la definición de las funciones trigonométricas, ¿cómo se deduce que $\csc \theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta}$?

Esta definición se cumple para cualquier punto $P(x, y)$ que pertenece al lado final de un ángulo agudo θ en posición normal, sin que necesariamente pertenezca a la circunferencia unitaria, como se muestra en la figura 5.

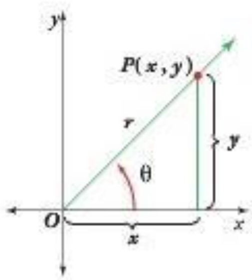


Figura 5.

Por ejemplo, para calcular $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ a partir del punto $\left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ que pertenece al lado final del ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$, se realizan los siguientes pasos:

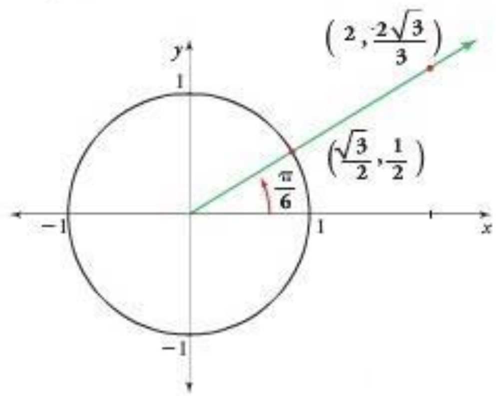
Primero, se calcula la distancia r del origen al punto $P(x, y)$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4 + \frac{4}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Luego, se calcula $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, hallando la razón entre x y r.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, se tiene que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, lo cual coincide con la coordenada en x del punto que determina el lado final de $\theta = \frac{\pi}{6}$ en la circunferencia unitaria, como se muestra en la siguiente gráfica.

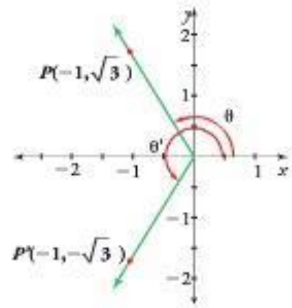


EJEMPLO

Hallar los posibles valores de tan θ si $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

Primero, se determina los posibles cuadrantes en los que está ubicado el lado final de θ. Como $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2} < 0$, entonces, el lado final de θ está en el cuadrante II o en el cuadrante III.

Luego, se tiene que $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \frac{x}{r}$, de donde se puede tener que $x = -1$ y $r = 2$, con lo cual se puede hallar el valor de y.



$$y = \pm\sqrt{(2)^2 - (-1)^2}$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

Así, hay dos posibles puntos para los que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, como se muestra en la gráfica.

Finalmente, se calculan los posibles valores de tan θ.

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \text{ o } \tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$